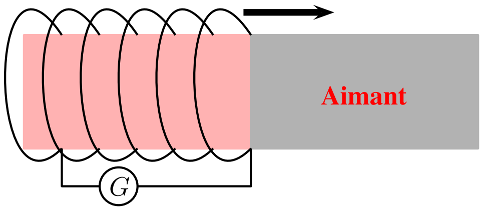
P 21

Induction électromagnétique

21.1 Mie en évidence expérimentale

- Un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent peut se comporter comme un générateur : il est le siège d'un phénomène d'induction. On parle alors d'induction de Lorentz.
Dans ce cas, le déplacement du circuit à vitesse $\overrightarrow{v}_e$ (dans le référentiel du laboratoire) dans le champ permanent $\overrightarrow{B}_0$ de l'aimant entraîne l'apparition d'une force magnétique $\overrightarrow{f} = q\,\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}_0$ susceptible de faire circuler les charges de conduction du circuit.



- Lorsqu'un circuit fixe est soumis à un champ magnétique variable, il est encore le siège d'un phénomène d'induction. On parle alors de phénomène d'induction de Neumann.
Ici, le circuit, fixe dans le référentiel du laboratoire, voit apparaître un champ magnétique variable créé par l'aimant. L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\,\overrightarrow{B}}{\partial t}$ montre l'apparition d'un champ électrique induit capable de mettre en mouvement les charges du circuit.

Dans le 2$^{\text{ème}}$ cas, un observateur qui se déplace avec l'aimant voit la bobine se déplacer dans un champ magnétique permanent. La distinction entre ces deux cas est liée à un choix d'observation, mais leurs effets sont les mêmes.
L'induction électromagnétique est un phénomène unique : l'induction de Lorentz et l'induction de Neumann en sont deux interprétations qui dépendent du point de vue de l'observateur.

21.2 Circuit fixe dans un champ magnétique variable

C'est le cas de Neumann.

21.2.1 Champ électrique

L'équation de Maxwell-Thomson $div\,\overrightarrow{B} = 0$ permet de définir, grâce à la relation $div\,\overrightarrow{rot} = 0$ un potentiel-vecteur $\overrightarrow{A}$ tel que :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}$$

En injectant cette relation dans l'équation de Maxwell-Faraday, il vient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} &= -\frac{\partial\,\overrightarrow{B}}{\partial t}\\ &= -\frac{\partial\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}\right)}{\partial t}\end{aligned}$$

Soit :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E} + \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{0}$$

Il existe donc au moins un champ scalaire que l'on notera $-V$, V étant appelé potentiel scalaire, tel que :

$$\overrightarrow{E} + \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t} = \overrightarrow{grad}\,(-V)$$

Soit :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}$$

— Remarque —

Dans le cas du régime permanent, on retrouve la relation :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

21.2.2 Circulation du champ électrique

Considérons un circuit filiforme parcouru par un courant électrique d'intensité i. On a $i = j\,S$ et $\overrightarrow{j} = \sigma\ \overrightarrow{E}$, σ étant la conductivité du conducteur. De plus, la loi d'Ohm s'écrit, pour une longueur $d\ell$: $dR = \dfrac{d\ell}{\sigma\,S}$. En combinant ces relations et en tenant compte de $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$, on obtient la circulation de A à N :

$$\int_{\Gamma_{AB}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\left(V_B - V_A\right) + \int_{\Gamma_{AB}} \left(-\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Or, on a :

$$\int_{\Gamma_{AB}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{\Gamma_{AB}} \frac{\overrightarrow{j}}{\sigma} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{\Gamma_{AB}} \frac{i}{\sigma\,S}\,d\ell = \int_{\Gamma_{AB}} i\,dR = R_{AB}\,i$$

On en déduit :

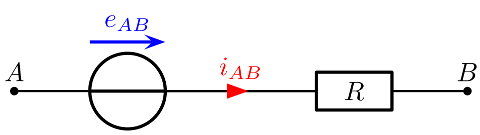
$$R_{AB}\,i = \left(V_A - V_B\right) + \int_{\Gamma_{AB}} \left(-\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Le dernier terme est égal à la circulation du champ électromoteur de Neumann $E_m = -\dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$ le long du chemin AB :

$$e_{AB} = \int_{\Gamma_{AB}} \left(-\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Ainsi, on obtient :

$$V_A - V_B = R_{AB}\,i - e_{AB}$$



et le circuit équivalent ci-contre.

— Remarques —

- Pour un circuit ouvert, l'intensité est nulle et $V_A - V_B = -e_{AB}$: seule existe aux bornes d'une circuit une différence de potentiel.
- Pour un circuit fermé, $V_A - V_B = 0$ et $e_{AB} = R_{AB}\,i$.

21.2.3 Loi de Faraday

En utilisant le théorème de Stokes, la circulation s'écrit :

$$\begin{aligned}
e_{AB} &= \int_{\Gamma_{AB}} \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{d\ell} \\
&= \int_{\Gamma_{AB}} \left(-\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) \cdot \overrightarrow{d\ell} \\
&= -\frac{d}{dt}\left(\int_{\Gamma_{AB}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell}\right) \\
&= -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d^2S}\right) \\
&= -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d^2S}\right) \\
&= -\frac{d\Phi}{dt}
\end{aligned}$$

21.2.4 Loi de Lenz

Le signe négatif de la loi de Faraday résulte des conventions utilisées pour orienter la surface du circuit et définir la fem algébrique et, physiquement, de l'effet modérateur du courant induit.
La loi de Lenz traduit qualitativement cet effet. Elle permet de prévoir le sens du courant induit dans les cas simples et de vérifier son signe une fois le calcul algébrique effectué.

— Loi de Lenz —

Le courant induit a un sens tel que le flux induit qu'il crée s'oppose aux variations du flux inducteur.
ou encore :
La force électromotrice induite tend par ses conséquences à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

21.2.5 Inductance propre et inductance mutuelle

21.2.5.1 Inductance propre

Considérons le flux propre à travers le circuit 1 du champ $\overrightarrow{B_1}$ créé par ce même circuit 1 :

$$\begin{aligned}\Phi_{11} &= \iint_{\Sigma_1} \overrightarrow{B_1} \cdot \overrightarrow{d^2 S_1} \\ &= \iint_{\Sigma_1} \overrightarrow{B_1} \cdot \overrightarrow{n_1} d^2 S_1\end{aligned}$$

On obtient :

$$\Phi_{11} = L_1\, i_1$$

L_1 est appelé cœfficient d'auto-induction ou inductance propre du circuit 1. Pour déterminer L_1, on doit connaître le champ créé par le circuit 1 en tout point de ce circuit 1.

21.2.5.2 Inductance mutuelle de deux circuits et inductance propre

Considérons deux circuits. Déterminons le flux du champ $\overrightarrow{B_1}$ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 :

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= \iint_{\Sigma_2} \overrightarrow{B_1} \cdot \overrightarrow{d^2 S_2} \\ &= \iint_{\Sigma_2} \overrightarrow{B_1} \cdot \overrightarrow{n_1} d^2 S_2\end{aligned}$$

De plus :

$$\overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{A_1}$$

En remplaçant dans l'expression et en utilisant le théorème de Stokes, on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{A_1} \cdot \overrightarrow{d\ell_2} \\ &= \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0\, i_1\, \overrightarrow{d\ell_1}}{4\,\pi\, PM} \cdot \overrightarrow{d\ell_2}\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\Phi_{12} = M_{12}\, i_1$$

M_{12} est appelé cœfficient d'induction mutuelle. On montre que :

$$M_{12} = M_{21}$$

Cette dernière propriété est utile car il est souvent plus simple de déterminer le flux dans un sens que dans l'autre.

En effet :

$$\Phi_{12} = M_{12}\, i_1 \text{ et } \Phi_{21} = M_{21}\, i_2$$

avec :

$$M_{21} = M_{12} = M$$

M est une grandeur algébrique dont le signe dépend de l'orientation des circuits.

On peut montrer que :

$$|M| < \sqrt{L_1\, L_2}$$

et poser alors un cœfficient de couplage $k = \dfrac{|M|}{\sqrt{L_1\, L_2}}$.

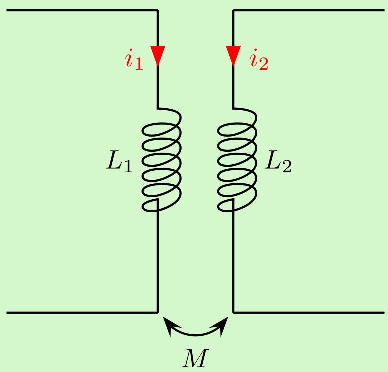
Le cas limite $k = 1$ correspond au cas où toutes les lignes de champ du champ magnétique créé par un des deux circuits traversent l'autre circuit. Il s'agit du cas idéal correspondant au couplage parfait.

21.2.5.3 Loi d'Ohm généralisée

La loi d'Ohm généralisée tient compte de l'inductance propre et de l'inductance mutuelle (du couplage) des circuits.

— Exemple —

Soit le circuit couplé ci-contre :
On peut écrire, pour la première bobine :



$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{21} \\ &= L_1\, i_1 + M\, i_2\end{aligned}$$

avec bien entendu $e_1 = -\dfrac{d\Phi_1}{dt}$.
Si les circuits sont rigides, alors :

$$e_1 = -L_1\, \frac{di_1}{dt} - M\, \frac{di_2}{dt}$$

La différence de potentiel aux bornes du premier circuit est alors :

$$u_1 = R_1\, i_1 + L_1\, \frac{di_1}{dt} + M\, \frac{di_2}{dt}$$

Les relations sont similaires pour la deuxième bobine.

Si les circuits ne sont pas rigides, il faut tenir compte des dérivées de L_1, L_2 et M par rapport au temps.

21.3 Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent

C'est le cas de Lorentz.

21.3.1 Déplacement d'un élément de circuit dans un champ permanent

Considérons un conducteur. Sous l'action d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, le conducteur se déplace. Ceci donne donc à tout point du circuit une vitesse $\overrightarrow{v}_e$. Tous ces points sont donc soumis à la composante magnétique de la force de Lorentz :

$$\overrightarrow{f} = q\,\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}$$

Il se peut que cette force admette une composante sur l'axe du conducteur, ceci entraîne alors un déplacement des charges, donc création d'un courant.
Considérons un circuit fermé contenant des charges mobiles. Calculons le travail de la force de Lorentz :

$$\begin{aligned} W &= \oint \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{d\ell} \\ &= \oint q\,(\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B})\cdot\overrightarrow{d\ell} \\ &= q\oint \overrightarrow{E_m}\cdot\overrightarrow{d\ell} \end{aligned}$$

En fait, dans le référentiel du laboratoire, la loi de composition des vitesses donne la vitesse d'un porteur de charge :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v}_r$$

$\overrightarrow{v}_e$ est la vitesse d'un élément de circuit par rapport au référentiel du laboratoire et $\overrightarrow{v}_r$ est la vitesse relative du porteur de charge par rapport a u circuit. Dans ce même référentiel, règne un champ électromagnétique dont la composante magnétique est permanente, ce qui implique $\dfrac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$.
Le champ électromagnétique dans le référentiel du conducteur est alors :

$$\overrightarrow{E}' = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}$$

— Champ électromoteur —

On peut introduire un champ électromoteur, dit de Lorentz :

$$\overrightarrow{E_m} = \overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}$$

Dans ce cas, tout se passe comme si le circuit n'était pas soumis à un champ $\overrightarrow{B}$, mais à un générateur de champ électromoteur, de champ, celui de Lorentz. Dans ce cas, on peut introduire une force électromotrice :

$$\begin{aligned} e &= \int \overrightarrow{E_m}\cdot\overrightarrow{d\ell} \\ &= \int_1^2 -\overrightarrow{grad}\,V\cdot\overrightarrow{d\ell} \\ &= V_1 - V_2 \\ &= \int (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})\cdot\overrightarrow{d\ell} \\ &= \int -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{d\ell})\cdot\overrightarrow{B} \end{aligned}$$

En considérant un élément de circuit qui se déplace :

$$\vec{v}\,dt \wedge \overrightarrow{d\ell} = \vec{n}\,d^2S$$

On obtient :

$$\begin{aligned} e &= -\iint_{\Sigma} \vec{B}\cdot\vec{n}\,\frac{d^2S}{dt} \\ &= -\frac{\delta\Phi_C}{dt} \end{aligned}$$

où Φ_c est le flux coupé de $\vec{B}$ à travers Σ.

21.3.2 Expression de Faraday

Si le champ magnétique est permanent, le flux coupé élémentaire est égale à la variation de flux et la loi de Faraday est valable :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

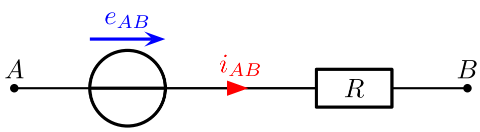
$d\Phi$ représente la variation de flux du champ magnétique à travers le circuit lors de son déplacement pendant la durée dt.
La force électromotrice est égale à la circulation du champ électromoteur de Neumann $E_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$ le long du chemin AB :

$$e_{AB} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

Ainsi, on obtient :

$$V_A - V_B = R_{AB}\,i - e_{AB}$$

et le circuit équivalent ci-contre.



21.4 Applications

21.4.1 Générateur électromécanique

Soit un barreau MN de longueur ℓ glissant sans frottement sur deux rails parallèles, horizontaux, plongés dans un champ magnétique permanent vertical descendant.

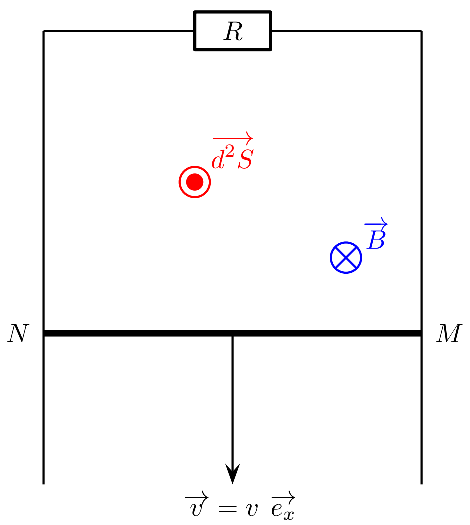
Le dispositif est contenu dans la plan horizontal Oxy.
Un opérateur extérieur maintient la vitesse $\vec{v}_e = \vec{v} = v\,\vec{e_x}$ constante.
Orientons le circuit de telle façon que le vecteur surface $\overrightarrow{d^2S}$ soit opposé au champ magnétique $\vec{B}$.
La force électromotrice vaut alors :

$$\begin{aligned} e &= \int_0^{\ell} \overrightarrow{E_m}\cdot\overrightarrow{d\ell} \\ &= \int_0^{\ell} \left(\vec{v}_e \wedge \vec{B}\right)\cdot\overrightarrow{d\ell} \\ &= B\,\ell\,v \end{aligned}$$

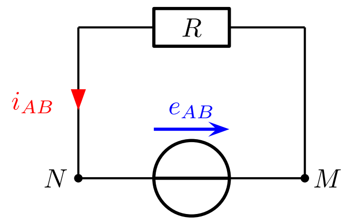
Comme le circuit est fermé, il y a naissance de courants induits d'intensité :

$$i = \frac{e}{R} = \frac{B\,\ell\,v}{R}$$

On réalise un générateur.



Le schéma équivalent est représenté ci-contre.



— Remarques —

- Si on oriente le circuit dans l'autre sens, on trouve $e = -B\,\ell\,v$ et $i = -\dfrac{B\,\ell\,v}{R}$ mais ces deux grandeurs sont orientés dans l'autre sens (par rapport à la première orientation du circuit).
- On peut utiliser un autre raisonnement :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

avec :

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\text{circuit}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} \\ &= -B\,S \\ &= -B\,\ell \int v\,dt\end{aligned}$$

On retrouve :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B\,\ell\,v$$

On peut également réaliser une étude énergétique :

La force $\overrightarrow{F}'$ qui permet de maintenir la vitesse constante a pour travail élémentaire :

$$\delta W = \overrightarrow{F}' \cdot \overrightarrow{v}\,dt = F'\,v\,dt$$

Si la vitesse est constante, cette force $\overrightarrow{F}'$ s'oppose à la force de Laplace $\overrightarrow{F}_L = -B\,i\,\ell\,\overrightarrow{e_x}$.
Le travail élémentaire reçu par la tige est donc :

$$\delta W = B\,i\,\ell\,v\,dt$$

En introduisant $e = B\,\ell\,v$, on obtient :

$$\delta W = e\,i\,dt = -i\,d\Phi$$

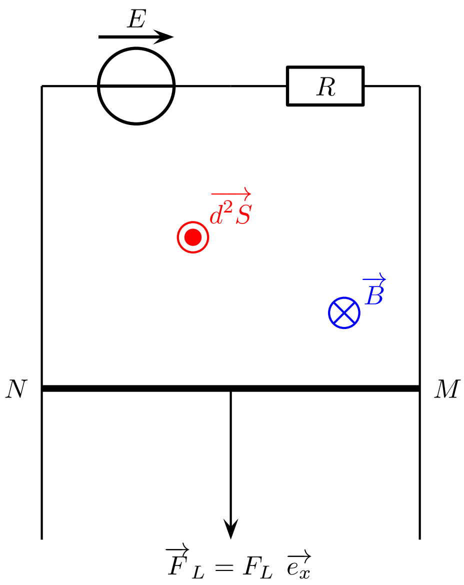
Cette énergie apparaît dans le circuit. On réalise donc la conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique.

21.4.2 Moteur

Soit un barreau MN de longueur ℓ pouvant glisser sans frottement sur deux rails parallèles, horizontaux, plongés dans un champ magnétique permanent vertical descendant.
Le dispositif est contenu dans la plan horizontal Oxy.
Orientons le circuit de telle façon que le vecteur surface $\overrightarrow{d^2S}$ soit opposé au champ magnétique $\overrightarrow{B}$.
Le courant I est la cause d'une force de Laplace s'exerçant sur la tige MN.
Il y a alors variation du flux magnétique et création d'une force électromotrice e qui génère un courant induit i s'opposant à I.

e est orienté dans le sens positif (mais sa valeur peut être négative) et s'oppose à E.
Cette force électromotrice vaut :

$$\begin{aligned} e &= \int_{NM} \vec{E}_m \cdot \vec{d\ell} \\ &= \int_{NM} \left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{d\ell} \end{aligned}$$



Avec le sens choisi, on trouve :

$$e = B\,\ell\,v > 0$$

Avec $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, on trouve le même résultat.
La loi des mailles donne ensuite :

$$E - e = E - B\,\ell\,v = R\,(I - i)$$

La force de Laplace est donc :

$$\begin{aligned} F_L &= B\,\ell\,(I-i) \\ &= B\,\ell\,\frac{E - B\,\ell\,v}{R} \\ &= \frac{B\,\ell\,E}{R} - \frac{B^2\,\ell^2\,v}{R} \end{aligned}$$

- Pendant la durée dt, la force de Laplace fournit un travail :

$$\begin{aligned} \delta W &= F_L\,v\,dt \\ &= \frac{E\,B\,\ell\,v}{R}\,dt - \frac{B^2\,\ell^2\,v^2}{R}\,dt \end{aligned}$$

- L'énergie électrique fournie par le générateur vaut :

$$\delta W_G = E\ (I-i)\ dt \text{ avec } i > 0$$

- L'énergie dissipée par effet Joule est :

$$\delta W_J = R\ (I-i)^2\ dt$$

- L'énergie fournie au rail mobile est alors :

$$\begin{aligned} \delta W_T &= \delta W_G - \delta W_J \\ &= \left[E\ (I-i) - R\ (I-i)^2\right]\ dt \\ &= \left[E - R\ (I-i)\right]\ (I-i)\ dt \\ &= B\,\ell\,v\ (I-i)\ dt \\ &= F_L\,v\,dt \end{aligned}$$

On réalise ici un moteur : l'énergie électrique est convertie en énergie mécanique.

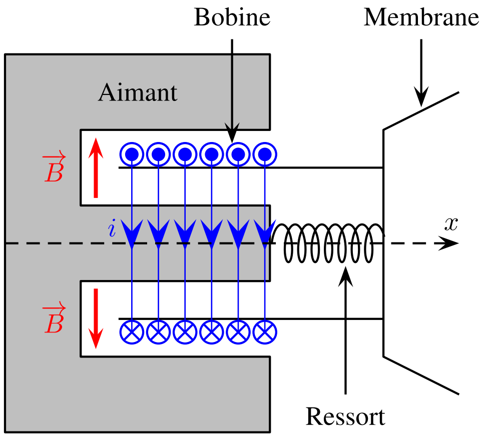
21.4.3 Alternateur

Une bobine comportant N spires de surface S tourne à vitesse angulaire constante ω, dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, autour d'un de ses diamètres perpendiculaire à $\vec{B}$.
Le couple exercé sur la bobine est alors :

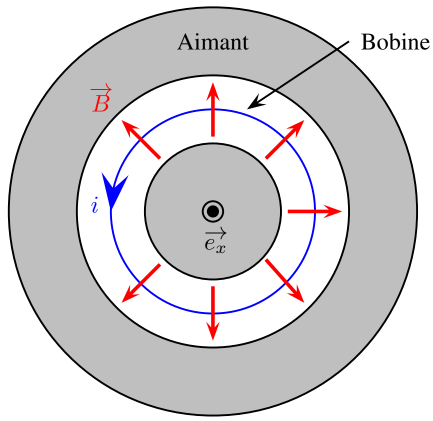
$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \\ &= N\,i\,\vec{S} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

C'est un alternateur à induit mobile avec des contacts pour fixer cet induit mobile.
Une autre possibilité consiste à travailler avec une bobine fixe et on fait alors tourner la source de champ magnétique (aimant ou électroaimant) : on obtient alors un alternateur à induit fixe (la bobine).

21.4.4 Haut-parleur



Coupe transversale de l'aimant



Vue de face de l'aimant

La bobine peut se translater le long de son axe noté $x'x$.
Elle est plongée dans un champ magnétique constant et radial créé par un aimant permanent de telle sorte que, au niveau des spires.
La bobine, de résistance R et d'inductance propre L est reliée à un générateur de f.e.m. $E(t)$, qui est l'image analogique du signal sonore à émettre.
La bobine, parcourue par le courant $i(t)$ et plongée dans le champ magnétique $\vec{B}$, est soumise à des forces de Laplace motrices qui la mettent en mouvement, ainsi que la membrane à laquelle elle est liée.
En se déplaçant dans l'air, la membrane engendre des ondes sonores.

21.4.5 Courants de Foucault

Ce sont les courants induits qui prennent naissance dans un volume métallique (soit mobile dans un champ magnétique permanent, soit fixe dans un champ magnétique variable).

Si on suppose le volume immobile, le champ électromoteur vaut $\vec{E}_m = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et la densité de courant vaut $\vec{j} = \sigma \vec{E}_m$.
Ils sont utilisés :

- dans les ralentisseurs de camions, cars et wagons : dans ce cas, c'est un disque qui tourne avec la roue. Si un champ magnétique est appliqué, le flux varie et il y a apparition d'une f.e.m. et de courants induits qui s'opposent au mouvement du disque couplé à l'axe des roues.
  Plus la vitesse est grande, plus i est grand et plus le freinage est important. Si la vitesse diminue, le freinage est moins important.
  Avantage de ce système : il n'y a pas de blocage des roues !
- plaques de cuisson et fours à induction :
  Un champ magnétique variable à fréquence élevée est la cause de courants induits qui produisent eux-mêmes de la chaleur par effet Joule dans une résistance.

Les courants de Foucault peuvent également être des inconvénients. Dans ce cas, on remplace la masse métallique par des feuillets isolés entre eux et empilés.

21.4.6 Autres applications

- transformateur,
- bêtatron,
- moteur asynchrone,
- lévitation,
- microphone électrodynamique,
- roue de Barlow
- ...